ВЫХОДИТ РАЗ В ДВЕ НЕДЕЛИ

Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.
Розничная цена: 49,90 грн, 990 тенге

Занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

9

Пирамида из шаров

ISSN 2225-1782
00009
9 772225 178772

DeAGOSTINI

занимательные ГОЛОВОЛОМКИ

КОЛЛЕКЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР ОТ DeAGOSTINI

В этом выпуске:

Математическая вселенная

Логарифмы Невозможно даже представить себе, сколько времени у математиков античности и Средневековья уходило на вычисления. С изобретением логарифмов ситуация резко изменилась: появилась возможность заменять умножение простым сложением, а извлечение корня — делением. Кроме того, логарифмы позволяют «уменьшать» и изучать феномены, кажущиеся для этого слишком... тектоническими.

Блистательные умы

Джон Непер Многие современники изобретателя логарифмов считали его колдуном. Однако оккультным наукам шотландский барон предпочитал теологию и математику. Именно он серьезно упростил жизнь многим будущим поколениям математиков и астрономов: «кости Непера» стали прямым предком использовавшейся до самого недавнего времени логарифмической линейки.

Математика на каждый день

От метеорологии к хаосу Люди издревле пытались проникнуть в суть природных явлений и найти методы, помогающие точно предсказывать погоду. В ход шли магические ритуалы, народные приметы, наблюдения и расчеты. Однако и сегодня, в эпоху высоких научных знаний и компьютерных технологий, прогнозы синоптиков не сбываются со стопроцентной точностью. Атмосфера по-прежнему находится во власти хаоса, и упорядочить его можно лишь решив систему дифференциальных уравнений.

Математические задачки

Лучшее из Сэма Лойда В этом выпуске вас ждет очередная подборка занимательных задач от непревзойденного мастера головоломок Сэма Лойда. Даже если вы никогда не бывали в Китае и не катались на паланкинах, не покоряли горные вершины в поисках змеи-обруча и не вдавались в тонкости ремесла сантехников, эти загадки наверняка принесут вам массу удовольствия.

Головоломки

Пирамида из шаров Существует множество видов фигурных чисел — это и египетские пирамиды, и число Зверя, и даже возглас «Аминь». Фигурные числа «пропахли» Каббалой и химическими лабораториями, однако это ни в коем случае не значит, что с ними нельзя играть!

«ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ»
Издание выходит раз в две недели
Выпуск № 9, 2012
РОССИЯ

ИЗДАТЕЛЬ, УЧРЕДИТЕЛЬ, РЕДАКЦИЯ:
ООО «Де Агостини», Россия
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 105 066, г. Москва, ул. Александра Лукьянова, д.3, стр.1
Письма читателей по данному адресу не принимаются.

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Николаос Скилакис
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: Анастасия Жаркова
ФИНАНСОВЫЙ ДИРЕКТОР: Наталия Василенко
КОММЕРЧЕСКИЙ ДИРЕКТОР: Александр Якутов
МЕНЕДЖЕР ПО МАРКЕТИНГУ: Михаил Ткачук
МЛАДШИЙ МЕНЕДЖЕР ПО ПРОДУКТУ: Любовь Мартынова

Свидетельство о регистрации средства массовой информации в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-43310 от 28.12.2010 г.

Для заказа пропущенных номеров и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ru
по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в России:
8-800-200-02-01
Телефон «горячей линии» для читателей Москвы:
8-495-660-02-02

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Россия, 170100, г. Тверь, Почтамт, а/я 245, «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ЗАО «ИД Бурда»

УКРАИНА
ИЗДАТЕЛЬ И УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО «Де Агостини Паблишинг», Украина
ЮРИДИЧЕСКИЙ АДРЕС: 01032, Украина, г. Киев, ул. Саксаганского, д. 119
ГЕНЕРАЛЬНЫЙ ДИРЕКТОР: Екатерина Клименко

Свидетельство о государственной регистрации печатного СМИ Министерства юстиции Украины КВ № 17502-6252Р от 01.03.2011

АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини», «Занимательные головоломки»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»

Для заказа пропущенных номеров и по всем вопросам, касающимся информации о коллекции, заходите на сайт
www.deagostini.ua
по остальным вопросам обращайтесь по телефону бесплатной «горячей линии» в Украине:
0-800-500-8-40

БЕЛАРУСЬ
ИМПОРТЕР И ДИСТРИБЬЮТОР В РБ: ООО «Росчерк», 220037, г. Минск, ул. Авангардная, д. 48а, литер 8/к, тел./факс: +375 17 2-999-260
АДРЕС ДЛЯ ПИСЕМ ЧИТАТЕЛЕЙ: Республика Беларусь, 220040, г. Минск, а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини», «Занимательные головоломки»

КАЗАХСТАН
РАСПРОСТРАНЕНИЕ: ТОО «КГП «Бурда-Алатау-Пресс»

РЕКОМЕНДУЕМАЯ РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 279 руб.
РОЗНИЧНАЯ ЦЕНА: 49,90 грн, 990 тенге

ОТПЕЧАТАНО В ТИПОГРАФИИ: G. Canale & C. S.p.A. Sos. Cernica 47, Bucuresti, Pantelimon – Ilfov, Romania.

ТИРАЖ: 115 000 экз.

Издатель оставляет за собой право изменять последовательность номеров и их содержание.

Издатель оставляет за собой право увеличить рекомендуемую цену выпусков.

Неотъемлемой частью каждого выпуска является приложение.

ISSN 2225-1782

ДАТА ВЫХОДА В РОССИИ: 05.06.2012

Изначально логарифмы были придуманы для упрощения бесконечных арифметических расчетов в астрономии. Однако впоследствии простой рабочий инструмент превратился в важную составляющую математической теории.

Логарифмы
Искусственные числа

Начало XV века ознаменовалось бурным развитием морской торговли, вследствие чего увеличилась потребность в новых навигационных картах, без которых невозможно было ориентироваться на море. Спрос на карты стремительно рос, однако составление новых атласов существенно тормозилось из-за объема и сложности необходимых тригонометрических расчетов — астрономы проводили над ними долгие часы, дни и даже годы. А теперь давайте представим, что у нас есть способ, позволяющий заменить умножение более простой операцией сложения, деление — вычитанием, возведение в степень — умножением и извлечение корней — делением. Что математики будут готовы отдать за этот метод?

◄ *Тихо Браге (1546—1601) — датский астроном, автор самых точных навигационных карт того времени.*

Концепция логарифма

1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

▲ *Еще несколько лет назад ученым и инженерам было необходимо учиться пользоваться логарифмической линейкой, принцип действия которой базировался на сложении и вычитании посредством логарифмических шкал.*

Первая строка таблицы, представленной вверху, начинается с единицы. В каждой последующей клетке прибавляется по одному нулю. В нижней строке записано количество нулей из соответствующей ячейки в верхней строке. А теперь давайте сравним обе строчки таблицы. В первой применено следующее правило: каждое число получено посредством умножения предыдущего на 10. А во второй строчке — наоборот, каждое следующее число получено благодаря прибавлению единицы к предыдущему. Важно заметить, что если значения в верхней строчке — произведения, то внизу представлены суммы. Следуя этому принципу, можно увидеть, что умножение

$$1000 \cdot 100\,000 = 100\,000\,000$$

идентично следующему действию:

$$3 + 5 = 8.$$

Данное предположение позволяет сильно облегчить работу с большими числами. Например, с помощью этого упрощения мы можем записать миллион как число 6. А произведение $100\,000\,000 \times \times 100\,000\,000$ как $6 \times 6 = 12$, то есть в виде линии из 12 нулей. Итак, становится ясно, что считать по этой формуле гораздо удобнее, чем по любой другой:

$$1\,000\,000 \cdot 1\,000\,000 = 1\,000\,000\,000\,000.$$

Интересный вопрос: можно ли использовать этот метод для любого числа, например, между 100 и 1000? Ответ: да. Наши наблюдения можно перенести на любую геометрическую прогрессию, как, например, на следующей таблице:

1	2	4	8	16	32	64	128	256
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Здесь мы видим, что произведение 4×16 (64) эквивалентно сумме $2 + 4$ в нижней строчке. Если же мы хотим произвести деление, то частное будет эквивалентно разностям соответствующих чисел в нижней строке. Например, чтобы узнать, сколько будет 256/8, нам необходимо всего лишь вычесть 3 из 8, и мы получим 5. Итак, результат деления 256 на 8 равен 32, что, в свою очередь, является числом в ячейке над цифрой 5. Именно эта связь между числами в верхней и в нижней строчке и легла в основу теории логарифмов.

Определение логарифма

Когда мы говорим, что цифре 5 соответствует число 32, то мы, наряду с иными возможными отношениями, устанавливаем следующее:

$$2^5 = 32.$$

Помните, что 2 в пятой степени — это 2, умноженное само на себя пять раз. Итак, мы бы могли прочитать две строчки следующим образом: «3 — это та степень, в которую надо возвести 2, чтобы получить 8» или «–7 — это та степень, в которую надо возвести 2, чтобы получить 128». Эти выражения записываются так:

$$\log_2 8 = 3$$
$$\log_2 128 = 7,$$

а читаются, соответственно, следующим образом: «двоичный логарифм 8 равен 3» и «двоичный логарифм 128 равен 7».

Если взять за образец первую таблицу, то: 104 = 10 000, то есть 4 — это степень, в которую надо возвести 10, чтобы получить 10 000, что равно $\log_{10} 10\,000 = 4$ — «десятичный логарифм 10 000 равен 4». Это позволяет нам следующим образом вывести общее определение логарифма: логарифм числа b по основанию a определяется как показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b ($a^c = b$):

$$\log_a b = c$$

Рождение логарифмов

Немецкий математик Михаэль Штифель (1487—1567) уже рассматривал в своей работе «Arithmetica Integra» («Полная арифметика») взаимосвязь между геометрической прогрессией a, a^2, a^3, a^4... и соответствующей арифметической прогрессией экспонентов 1, 2, 3, 4... Именно он первым заметил, что умножение и деление чисел из первой шкалы соответствуют сложению и вычитанию значений из второй. Ученый даже сумел распространить эту взаимосвязь на отрицательные и дробные экспоненты (например, экспоненту 3 – 5 = –2 соответствовало бы a^3/a^5). Тем не менее, Штифель не сумел сделать тот небольшой шаг, что отделял его от логарифмов. Чтобы увидеть это открытие, миру пришлось ждать появления Джона Непера (1550—1617) — он представил миру логарифмическую концепцию в 1614 году в своем сочинении «Mirifici logarithmorum canonis descriptio» («Описание удивительной таблицы логарифмов») и в последующем труде, изданном в 1619 году под названием «Mirifici lo-

Как себя ведут логарифмы

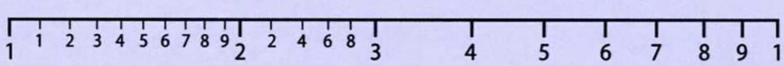
$$\log (a \cdot b) = \log a + \log b$$
$$\log (a/b) = \log a - \log b$$
$$\log (a^b) = b \cdot \log a$$

Эти три важных логарифмических свойства были впервые обнаружены в 1650 году английским математиком Уильямом Отредом (1574—1660), создателем логарифмической линейки.

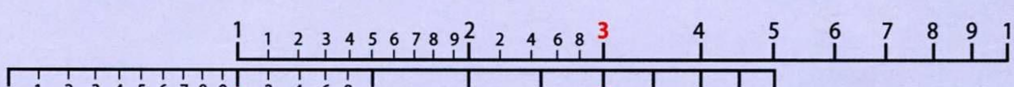
▲ *Страница из книги о логарифмах «Mirifici logarithmorum canonis constructio» («Построение удивительной таблицы логарифмов») Джона Непера. Таблицы Непера — первые в своем роде — были с энтузиазмом приняты астрономами и мореплавателями.*

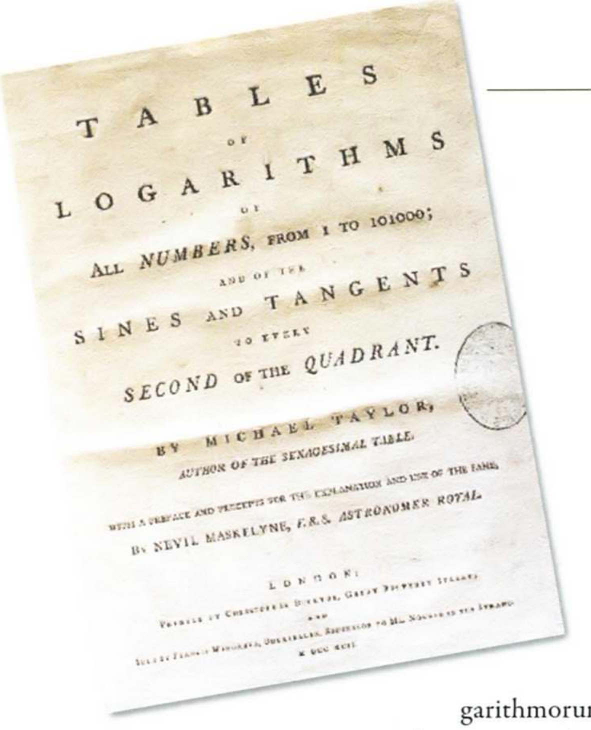
Логарифмическая линейка

Британский математик Эдмунд Гантер (1581—1626) придумал счетное устройство, основанное на логарифмической теории. Состояло это приспособление из шкалы с целыми числами от 1 до 10, расстояние между которыми было пропорционально соответствующим логарифмам.



Итак, чтобы узнать произведение двух чисел, например, 2 и 3, достаточно лишь сложить соответствующие сегменты (начало подвижной шкалы совмещают с первым множителем на неподвижной шкале, а на подвижной шкале находят второй множитель); чтобы разделить числа, на подвижной шкале находят делитель и совмещают его с делимым на неподвижной шкале. Немного позже Уильям Отред, тоже британец, предложил приспособление, где вспомогательная линейка скользила вдоль основной — это избавляло от необходимости использовать дополнительные инструменты для расчета сегментов.



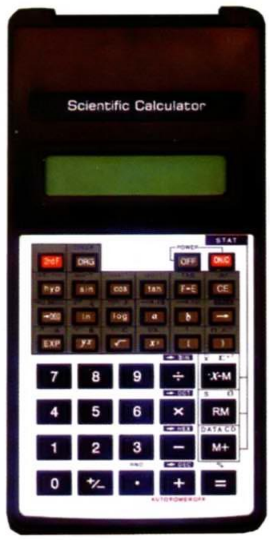


◄ *Логарифмические таблицы превратились в предметы первой необходимости для обсерваторий, университетов и академий наук. К числу лучших таблиц своей эпохи относятся таблицы английского математика Майкла Тейлора (1756—1789), охватывающие логарифмы первых 101 000 натуральных чисел.*

garithmorum canonis constructio» («Построение удивительной таблицы логарифмов»). Изобретение Непером логарифмов не было ни результатом чисто арифметической работы, как могло показаться сначала, ни плодом интуиции, как у Штифеля. В основе его лежало изучение проблем механики. Для определения логарифма Непер использовал понятия равномерного и замедляющегося движения. Их соотношение он продемонстрировал на примере движения тел по траекториям AB и A'X. Два тела вышли одновременно из точек A и A' с одинаковой начальной скоростью, но если скорость второго постоянна, то первое постепенно замедляется, и потому за те же промежутки времени, что и для равномерного движения, тело проходит пропорционально уменьшающиеся расстояния. По мере приближения к точке B эти расстояния становятся все короче и короче.

По Неперу, расстояние, пройденное вторым телом за определенное время, — это логарифм расстояния, которое осталось пройти первому телу, чтобы достичь точки B. Сам термин «логарифм», или «искусственное число», отсылает нас к соотношению соответствующих расстояний. В приведенном выше арифметическом примере это отношение эквивалентно тому, которое существовало между числами первого и второго ряда в таблицах.

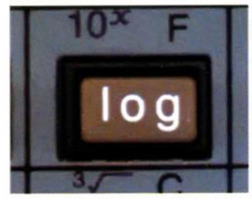
Генри Бриггс (1561—1632), возглавлявший кафедру геометрии в Оксфордском университете, прочитал труд Непера и написал шотландскому математику письмо, где сообщал об интересе, который вызвали у него логарифмы, и просил о встрече. Летом 1615 года ученые увиделись в замке Мерчистон, и между ними произошла интересная дискуссия о необходимости использования десятичных логарифмов и об обозначении их log1 = 0. Непер рассказал, что уже рассматривал обе возможности, но не чувствует в себе достаточно сил, чтобы разработать новую версию своих таблиц (он скончался годом позже). Тогда Бриггс предложил простое определение логарифма, очень похожее на то, что мы приводили в прошлом параграфе. В дальнейшем оно дало начало бригговскому логарифму.



От таблиц к калькуляторам

Очевидно, что таблица, основанная на десятичных степенях (вроде той, которая изображена выше), не могла бы получить достаточного распространения, так как предоставляемые ею возможности крайне невелики. С ее помощью невозможно вычислить логарифм, например, 56. Бриггс был первым, кто взял на себя труд изготовить полную таблицу десятичных логарифмов.

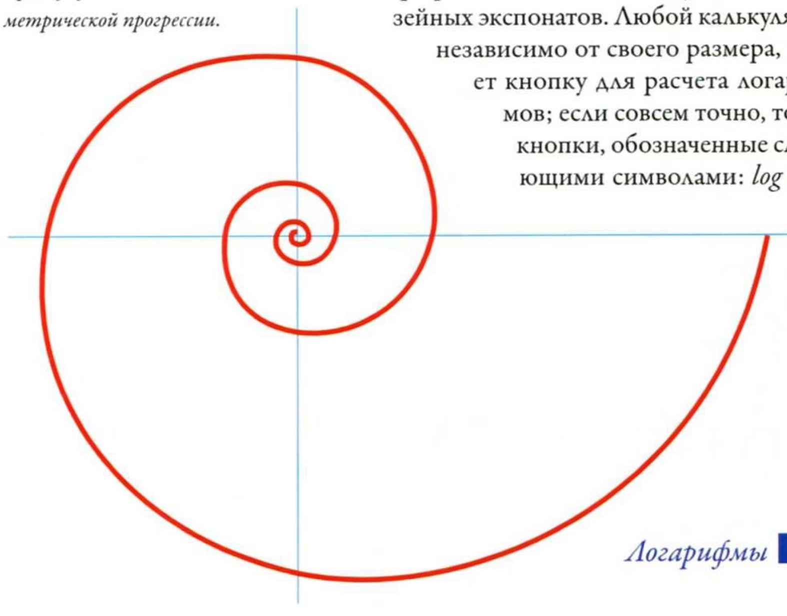
◄▼ *Уже нет необходимости открывать толстые книги и терпеливо просматривать колонны чисел, чтобы найти логарифм. Достаточно включить карманный калькулятор, набрать на клавиатуре нужное число и нажать одну из двух кнопок, log или ln, в зависимости от того, какой логарифм нам необходим — натуральный или десятичный.*



В 1617 году появились логарифмические таблицы с числами от 1 до 1000 и точностью до 14 знаков после запятой. Семь лет спустя в употребление вошли новые таблицы, которые охватывали значения от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Разработанные, как уже говорилось, для упрощения вычислений и расчетов (особенно в астрономии), логарифмические таблицы в кратчайшие сроки получили широкую известность.

К настоящему моменту калькуляторы отправили логарифмические таблицы в хранилища музейных экспонатов. Любой калькулятор, независимо от своего размера, имеет кнопку для расчета логарифмов; если совсем точно, то две кнопки, обозначенные следующими символами: *log* и *ln*.

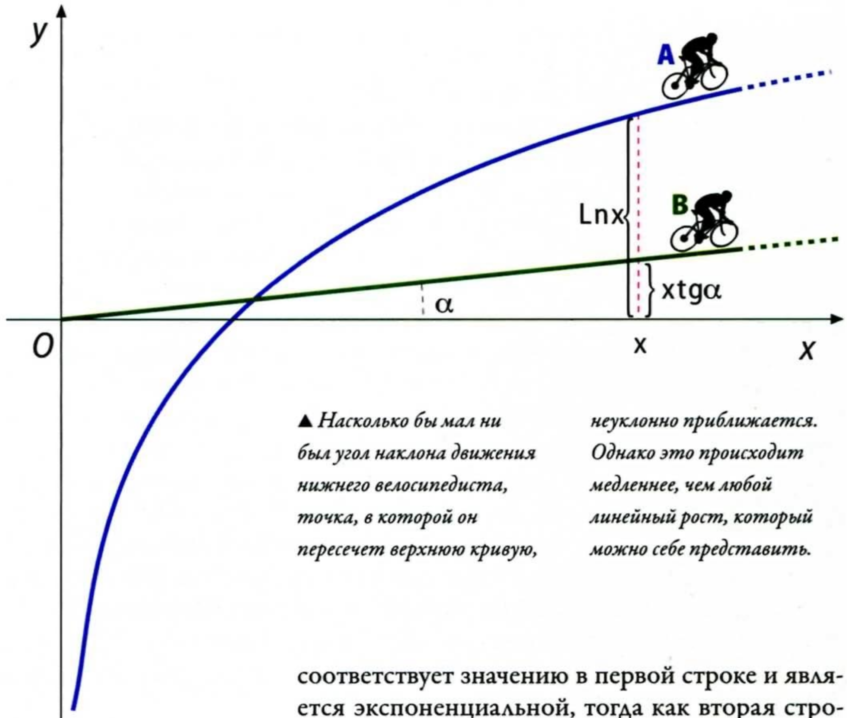
▼ *Плоская кривая, описываемая точкой, движущейся по прямой, которая вращается около одной из своих точек O (полюса логарифмической спирали) таким образом, что логарифм расстояния движущейся точки от полюса изменяется пропорционально углу поворота, а радиус увеличивается в геометрической прогрессии.*



Разница между ними состоит в том, какое число берется за основание. Обычно основание, относительно которого рассчитывается логарифм, должно обозначаться нижним индексом символа log: $\log_5$, $\log_7$ и т. д.

Два наиболее популярных основания, на базе которых были построены первые таблицы, это 10 и e (основание натурального логарифма). Одним из способов определения значения e является предел $(1+1/n)^n$ при показателе n, стремящемся к бесконечности, который является пределом последовательности $(3/2)^2, (4/3)^3, (5/4)^4$... Это одна из основных натуральных констант, ее приблизительное значение равно 2,718 145. Когда *log* не имеет нижнего индекса, то подразумевается, что его значение 10; логарифмы по основанию e обычно обозначаются как *ln*. Первые называются десятичными, вторые — натуральными, либо логарифмами Непера. Существует простая формула, которая показывает соотношение десятичных и натуральных логарифмов:

$$\log a = \log e \cdot \ln a.$$



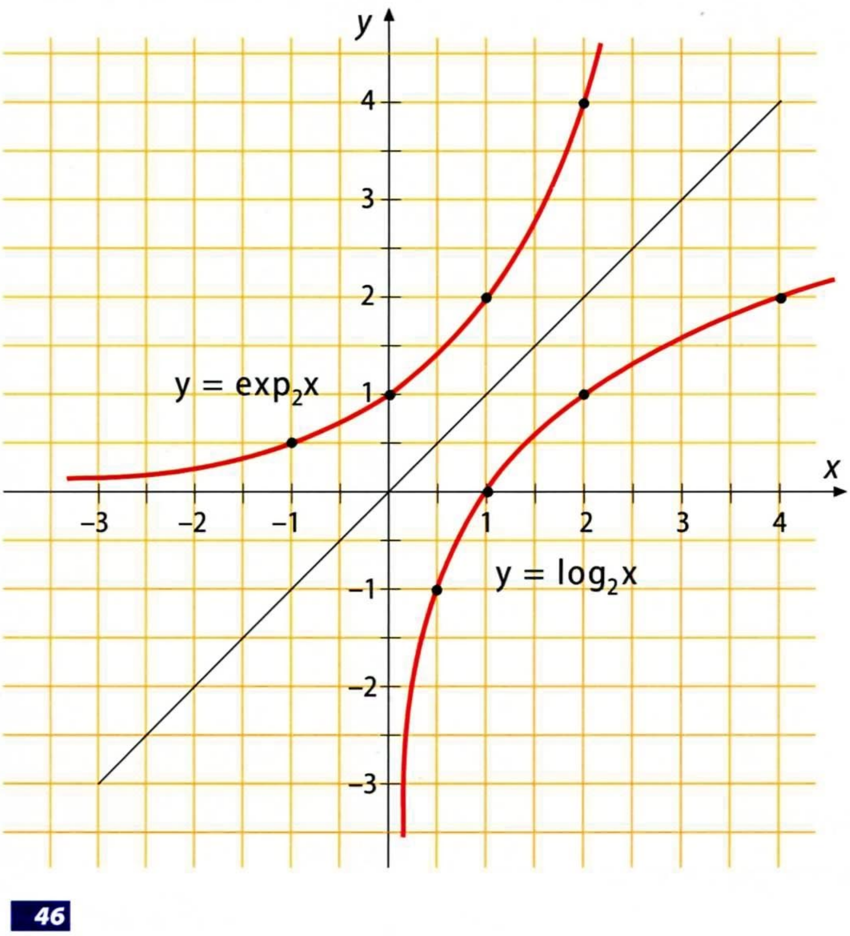
▲ *Насколько бы мал ни был угол наклона движения нижнего велосипедиста, точка, в которой он пересечет верхнюю кривую, неуклонно приближается. Однако это происходит медленнее, чем любой линейный рост, который можно себе представить.*

Логарифмические кривые

Если можно сказать, что экспоненциальный рост невероятно быстр, то логарифмический рост — до обидного медленный. Если перенести значения из второй таблицы на стр. 43 на ось координат, то получатся две кривые как на нижнем графике (иллюстрация снизу). Верхняя кривая соответствует значению в первой строке и является экспоненциальной, тогда как вторая строка соответствует нижней кривой, логарифмической. Их явное сходство скрывает достаточно конкретную взаимосвязь: одна из кривых обратна другой; то есть если бы мы поменяли местами оси x и y, то кривые поменялись бы местами. Если бы мы могли занять место над логарифмической кривой, а именно в точке (1,0), то мы бы увидели, как, двигаясь по направлению к точке отправления, кривая со стремительным ускорением уходит в бесконечность. Это происходит из-за того, что логарифмы чисел менее единицы являются отрицательными, и чем ближе к нулю число, которое мы берем, тем больше будет отрицательное число, которое получится в результате.

И наоборот, если мы пройдемся в противоположную сторону, туда, где значения x растут, то начнем восхождение по плавной наклонной, похожей на горный хребет, который тянется вдаль до бесконечности. А теперь представим, что вместо прогулки по горизонтальной оси мы делаем это по прямой, которая исходит из начала и имеет определенный угол, отличный от 0 (посмотрите на фигуру сверху). Если значение a достаточно мало, то вскоре мы пересечем логарифмическую кривую и окажемся внизу. Без сомнения, сколько бы времени мы не провели в тени кривой, придет момент, когда мы снова ее встретим, пересечем и удалимся, оставляя ее все ниже и ниже. Удивительно, но данное обстоятельство будет определяться небольшим наклоном прямой a. Это объясняется тем, что у названной прямой предоминирует линейный рост, тогда как кривая является отражением логарифмического роста. Линейный рост, каким бы он ни был медленным, приходит к точке, в которой он опережает логарифмический рост. Свойства, которые мы только что описали, являются ключами к пониманию

▼ *Сходство между этими двумя кривыми, экспоненциальной и логарифмической, не случайно, ведь действия, определяющие эти кривые, — обратны друг другу: то, что одна создает, другая отменяет.*



Логарифмы и землетрясения

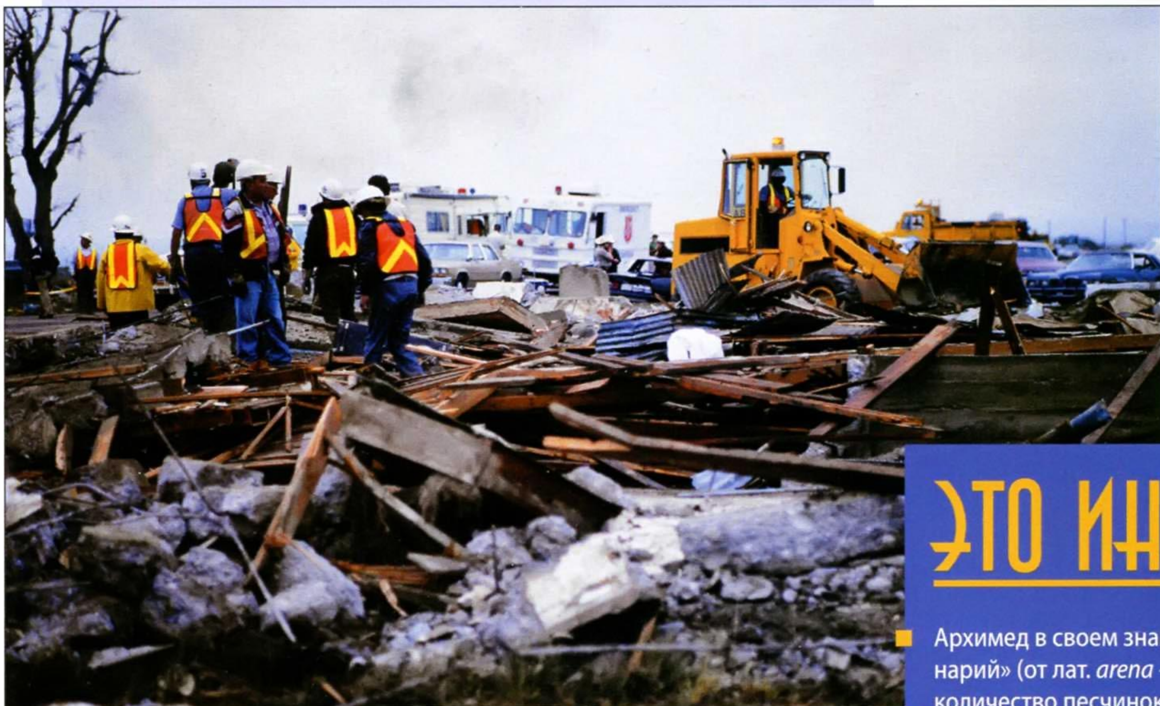
Одна из самых известных логарифмических шкал — это шкала, разработанная в 1935 году американским сейсмографом Чарльзом Рихтером. Она служит для объективного измерения интенсивности землетрясений. Каждое значение по шкале Рихтера представляет собой десятичный логарифм активности сейсмических волн, зарегистрированных приборами. Обычно ее значения колеблются между 3,5 (слабое землетрясение) и 8 баллами (разрушительное землетрясение). В шкале используется логарифмический масштаб, то есть каждое следующее целое значение соответствует в 10 раз более мощному землетрясению — иными словами, интенсивность шестибалльных толчков в 10 раз выше, чем пятибалльных. По высвобождающейся в результате землетрясения энергии разница в один балл эквивалентна умножению данной величины в 35 раз. Например, при землетрясении в 4 балла будут дребезжать стекла, качаться люстры и «прыгать» табуретки. В то же время землетрясение силой 7,8 баллов по шкале Рихтера в 1906 году едва не сравняло с землей весь город Сан-Франциско. Разрушительная энергия этой катастрофы была в 923 521 (31^4) раз сильнее.

определенных феноменов использования логарифмических шкал.

Логарифмические шкалы

Так называют любую шкалу, значения которой выражаются логарифмами (то есть длина отрезка шкалы пропорциональна логарифму отношения величин, отмеченных на концах этого отрезка). Логарифмические шкалы получили широкое распространение в науке и технике — более удобного способа отображения больших диапазонов значений величин до сих пор не придумано.

Например, показатель pH, обозначающий уровень кислотности раствора (количество ионов H_3O+), также задается в логарифмическом масштабе. Другой пример повседневного использования логарифмической шкалы — это измерение амплитуды или интенсивности звуковой волны. Давление звука на наши уши измеряется

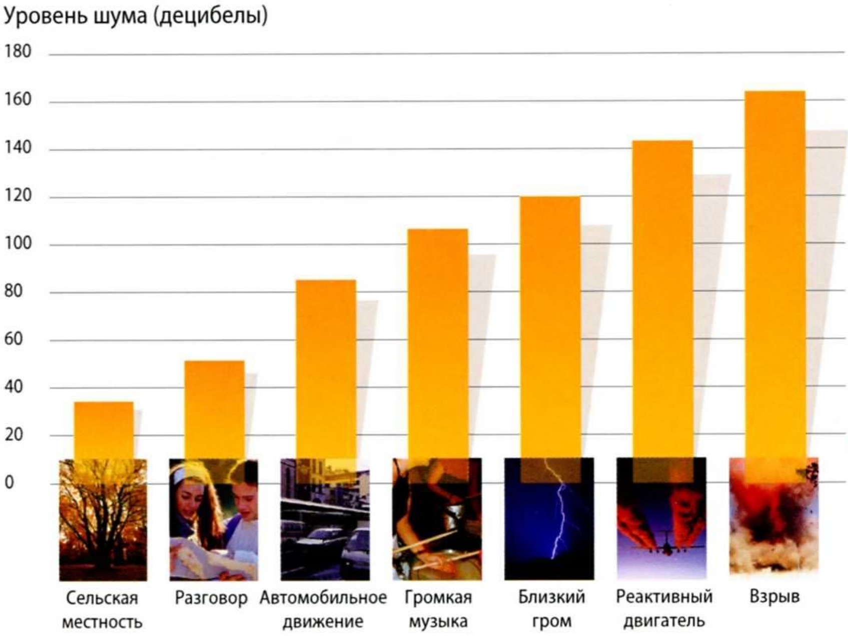


◀ *Логарифмические шкалы имеют большое практическое значение для количественной оценки интенсивности землетрясений. Это происходит потому, что интервалы интенсивности шкалы соответствуют произошедшим в связи со стихией разрушениям, которые, в свою очередь, легко поддаются классификации.*

Шкала Рихтера	Тип землетрясения. Последствия
< 3,5	Почти незаметное.
3,5—5,4	Очень слабое. В некоторых случаях может причинить минимальный ущерб.
5,5—6,0	Слабое. Может нанести небольшой ущерб зданиям.
6,1—6,9	Умеренное. Может нанести заметный вред в густонаселенных районах, приводит к повреждению сооружений.
7,0—7,9	Сильное. В районе эпицентра наблюдаются значительные разрушения.
> 8,0	Очень сильное. Вызывает катастрофические разрушения.

Это интересно

- Архимед в своем знаменитом труде «Аренарий» (от лат. *arena* — «песок») рассчитал количество песчинок, которое необходимо, чтобы заполнить всю Вселенную. Естественно, Архимеду пришлось при этом работать с огромнейшими величинами, поэтому ученый использовал в своих расчетах концепцию «порядков» и изображал числа как «числа первого порядка», «второго порядка» и т. д. В некотором смысле, это очень похоже на то, что мы использовали для обозначения 100 как числа «второго порядка» или 1000 как числа «третьего порядка» и т. д. Получилось, что Архимед случайно заметил, что сумма порядков различных чисел соответствует порядку их произведения и, таким образом, предвосхитил основной принцип, на котором столетия спустя будет выстроена концепция логарифма.

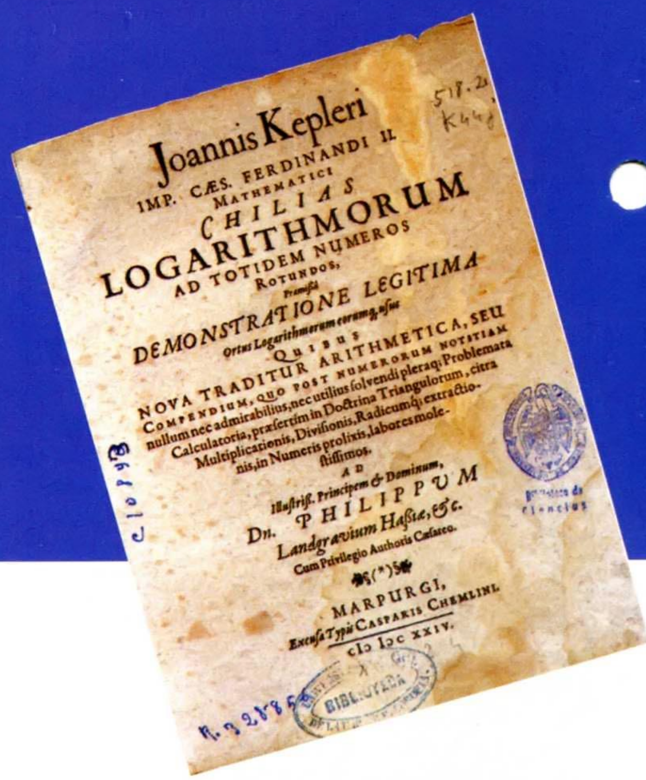


▲ *Практически весь мир знает, что децибелы относятся к уровню шума. Но то, что шкала, по которой измеряют этот уровень, является логарифмической, известно немногим.*

в Паскалях (Па). Человеческое ухо воспринимает звуки в диапазоне от 0,00 002 Па и почти до 100 Па (последнее значение подходит к болевому порогу). Это такой широкий диапазон, что на практике им невозможно управлять, а потому вместо высокоточной шкалы принимается логарифмическая, выраженная в децибелах, спектр которых ограничен диапазоном от 0 до 130 дБ. Логарифмические шкалы могут быть очень полезны, хотя могут и ввести в заблуждение. Например, чтобы изобразить спектр электромагнитного излучения в линейном масштабе, потребовалось бы несколько километров бумаги, в логарифмическом же представлении мы сможем увидеть все области спектра. Следует отметить, что относительные размеры некоторых областей сильно искажены, что проявляется при попытке сравнить их размеры, соответствующие инфракрасным и видимым волнам.

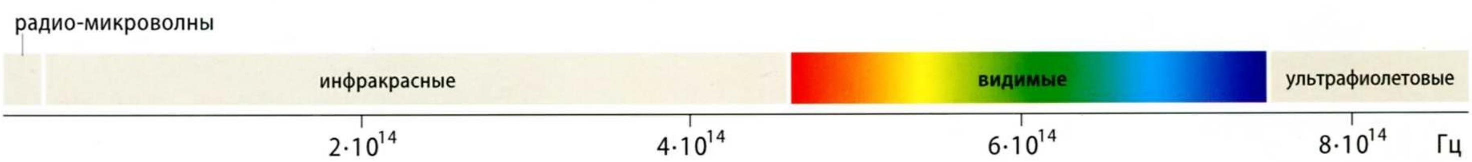
ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Юст Бюрги (1552—1632) — швейцарский часовщик, был в течение некоторого времени помощником Иоганна Кеплера, который ввел его в мир астрономических расчетов. Бюрги независимо от Непера придумал логарифмы в 1600 году, но опубликовал свою теорию в труде «Progress tabulen» («Таблицы прогрессий») только в 1620 году, через шесть лет после шотландца.
- Когда Иоганн Кеплер (1571—1630) получил первые логарифмические таблицы, он написал заметку, в которой кроме описания использования таблицы выражал также и свою радость в связи с ее изобретением. Такая реакция вызвала негодование Михаэля Местлина, учителя Кеплера, который заметил, что «не подобает профессору математики по-детски радоваться любому облегчению труда».


Joannis Kepleri
IMP. CÆS. FERDINANDI II. MATHEMATICI
CHILIAS LOGARITHMORUM
AD TOTIDEM NUMEROS ROTUNDOS,
Præmissa
DEMONSTRATIONE LEGITIMA
Ortus Logarithmorum eorumq; usus
QUIBUS
NOVA TRADITUR ARITHMETICA, SEU
COMPENDIUM, QUO POST NUMERORUM NOTITIAM
nullum nec admirabilius, nec utilius solvendi pleraq; Problemata
Calculatoria, præsertim in Doctrina Triangulorum, citra
Multiplicationis, Divisionis, Radicumq; extractionis, in Numeris prolixis, labores molestissimos.
AD
Illustriss. Principem & Dominum,
Dn. PHILIPPUM
Landgravium Hassiæ, &c.
Cum Privilegio Authoris Cæsareo.
MARPURGI,
Excusa Typis Casparis Chemlini.
clↄ Iↄc XXIV.

► *Обложка труда, который Иоганн Кеплер в конце своего жизненного пути посвятил тому разделу математики, который его более всего завораживал. Эта книга способствовала широкому распространению логарифмов в Германии.*

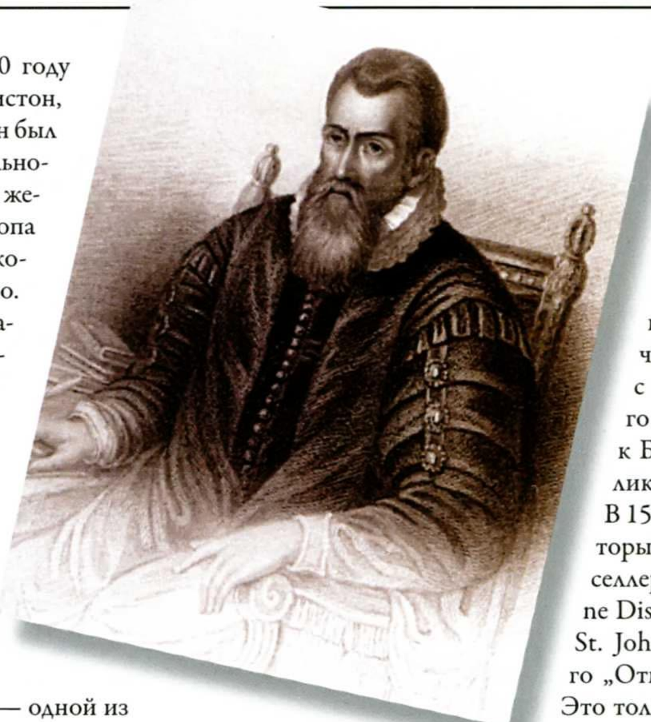
▼ *Реальные пропорции спрятаны за логарифмическими шкалами. Ниже представлены настоящие «размеры» интервалов видимых и инфракрасных волн в спектре электромагнитного излучения. Сверху на логарифмической шкале масштабы значительно искажены.*



Вклад этого математика-любителя в науку, бесспорно, добавил ей изящества. Искренняя благодарность всех, кто до изобретения логарифмов проводил часы, дни и годы в бесконечных математических расчетах, обеспечила ему мировую славу.

От богословия к логарифмам
Джон Непер

Джон Непер родился в 1550 году в шотландском замке Мерчистон, неподалеку от Эдинбурга. Он был сыном Арчибальда Непера, влиятельного и знатного дворянина, который женился в 1549 году на сестре епископа Оркни. О первых годах жизни Джона Непера почти ничего неизвестно. Должно быть, начальное образование он получил в стенах родительского дома, затем в возрасте 13 лет поступил в Сент-Эндрюсский университет. Позже, уже получив образование теолога, он поехал учиться в Европу, где и приобрел большее количество своих знаний по математике. В 1571 году он вернулся в Шотландию, чтобы присутствовать на втором бракосочетании своего отца, после чего остался в Гартнессе — одной из многочисленных резиденций семьи. Через год Непер женился на Элизабет Стирлинг и затеял строительство собственного замка, которое было завершено в 1574 году. Замкнутый образ жизни придавал ученому некоторую таинственность и даже принес ему определенную известность среди современников. Поговаривали, что он колдун, но Непер и не пытался развеять эти слухи. Он умер, вероятно, от подагры, 4 апреля 1617 года.



◄ Шотландский философ Дэвид Юм назвал Джона Непера величайшей личностью, когда-либо рожденной в его стране.

Религиозная полемика

Непер был убежденным протестантом и без колебаний вступал в многочисленные теологические споры того времени — как с защитниками его собственного символа веры, благосклонными к Британской короне, так и с католиками, приверженцами Франции. В 1593 году был опубликован труд, который можно назвать главным «бестселлером» в карьере Непера — «Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John» («Простое изъяснение всего „Откровения“ Иоанна Богослова»). Это толкование Апокалипсиса, согласно которому антихристом является сам Папа Римский, а конец света наступит в ближайшее столетие. Книга Непера имела широкий резонанс в Европе и была переведена на несколько языков. Шотландский ученый не только выражал собственные религиозные убеждения, но и хотел предупредить своих соотечественников об опасности, грозящей политическому будущему Британии. Угроза, по его мнению, исходила от

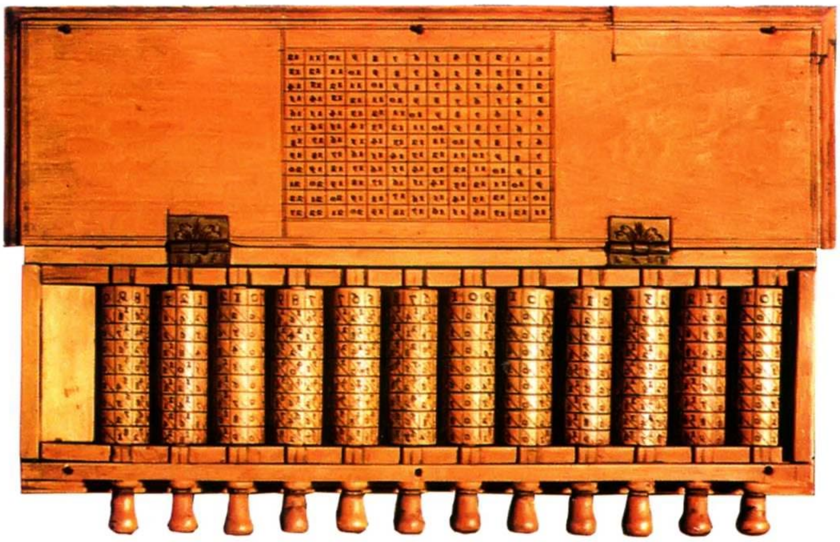
«Кости Непера»

В 1617 году Непер опубликовал трактат под названием «Рабдология, или Две книги о счете с помощью палочек». В нем он объяснял метод, благодаря которому можно было без труда складывать и умножать числа. Счетные палочки, разделенные на поля с цифрами, явились предшественницами логарифмической линейки. В набор для вычислений входили одна «кость» с цифрами от 1 до 9 (указатель строк) и палочки с таблицей умножения всех чисел от 1 до 9 (разряды множимого). Сверху каждой такой палочки наносилось число от 1 до 9, а по всей длине — результаты умножения этого числа на числа от 1 до 9. Палочки были внешне похожи на кости домино, кроме того, для их изготовления нередко использовалась слоновая кость.

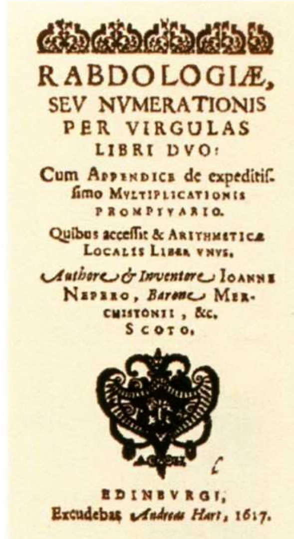
Этим и объясняется название, которое закрепилось за изобретенным Непером счетным устройством. В Шотландии «кости Непера» широко использовались на протяжении нескольких столетий.

Чтобы умножить 187 на 3, необходимо выбрать три столбца, соответствующих числам 1, 8 и 7, и выстроить их как на рисунке слева. Третья строка таблицы показывает следующее:

Суммы пар в каждой клетке противоположных по диагонали чисел снизу вверх и слева направо 3+2; 4+2; 1+ (0) показывают нам каждый знак в решении задачи: 561.



◄ *Одна из счетных машин Непера, основанная на знаменитых «костях». На каждом цилиндрическом стержне изображены разделенные по диагонали на две половины квадратики и вписана таблица умножения от 1 до 9. Поворачивая цилиндр соответствующим образом, можно добиться различных комбинаций чисел и произвести разные операции.*



RABDOLOGIÆ,
SEV NVMERATIONIS
PER VIRGULAS
LIBRI DVO:
Cum Appendice de expeditissimo Multiplicationis Promptuario.
Quibus accessit & Arithmeticæ Localis Liber vnus.
Authore & Inventore Ioanne Nepero, Barone Merchistonii, &c. Scoto.

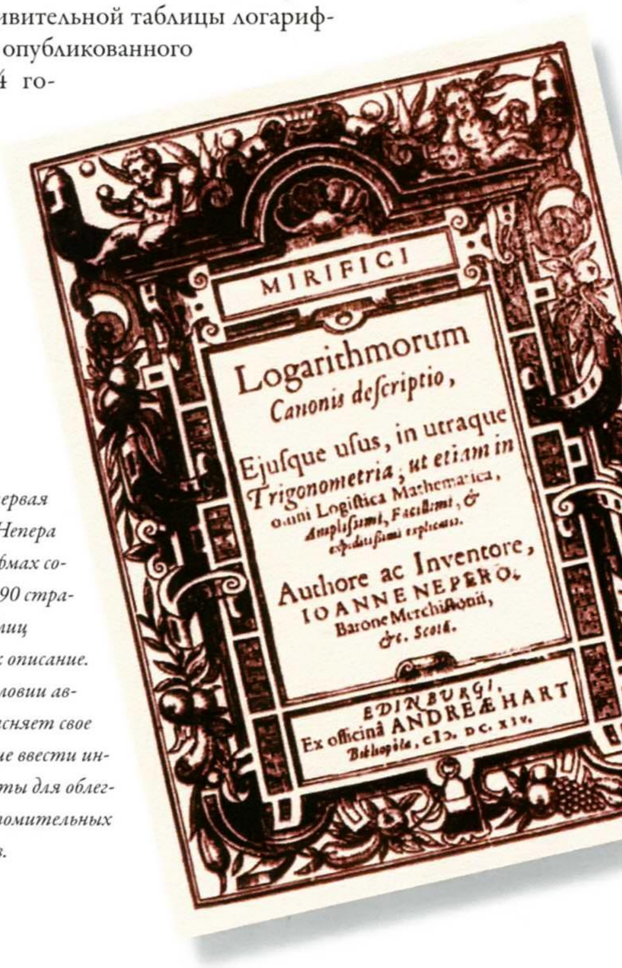
EDINBVRGI,
Excudebat Andreas Hart, 1617.

▲ *Обложка труда Джона Непера «Рабдология», который, как ни странно, был переведен с латинского на английский только в XX веке. В этой книге помимо различных устройств облегчения расчетов также присутствуют алгоритмы преобразования десятичных чисел в бинарные и совершения различных операций над ними.*

папистов — в те времена считалось, что они состоят в сговоре с испанским королем и готовят почву для вторжения.

Математика Непера

Редкие свободные минуты, появлявшиеся между теологическими изысканиями, Непер предпочитал посвящать математике. Без сомнения, огромное количество времени у него, как и у всех других математиков того периода, уходило на трудоемкие математические расчеты. В интересах Непера было облегчить вычисления и предложить какое-то революционное решение проблемы для математики и науки вообще: логарифмы. Непер взял заключения из своего первого труда «Mirifici logarithmorum canonis descriptio» («Описание удивительной таблицы логарифмов»), опубликованного в 1614 году. Пять лет спустя, уже после смерти шотландского ученого, вышел следующий труд «Mirifici logarithmorum canonis constructio» («Построение удивительной таблицы логарифмов»), где появляются логарифмические таблицы, демонстрирующие высокую эффективность нового инструмента. Помимо логарифмов, Непер успешно работал с задачами о сферических треугольниках и трудился над получением экспоненциальных выражений, позволяющих упростить тригонометрические функции. Также ученый ввел десятичную запись для дробей и придумал систему механизированного счета для вычислений с использованием больших чисел, которая получила негласное название «кости Непера» (см. иллюстрацию вверху страницы).



MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopolæ, cIɔ. DC. XIV.

► *Эта первая работа Непера о логарифмах содержит 90 страниц таблиц и одно их описание. В предисловии автор объясняет свое намерение ввести инструменты для облегчения утомительных расчетов.*

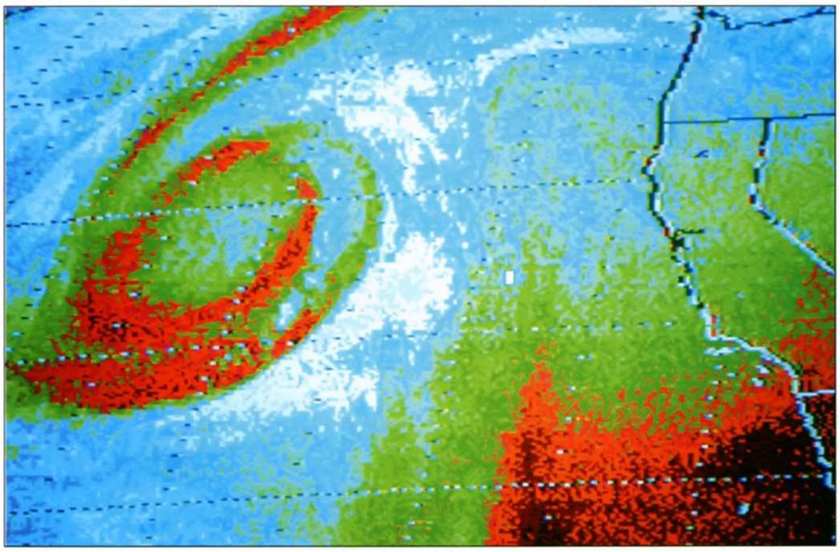
ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Мало имен собственных в истории математики имело столько вариантов, как имя Джона Непера: Napeir, Nepair, Nepeir, Neper, Nepero, Napare, Naper, Naipper... Сегодня логарифмы по основанию *e* известны именно как неперовские или логарифмы Непера. На самом деле имя «Джон Непер» относительно современного происхождения, и нет доказательств, что при жизни ученый звался именно так.

- Однажды в Мерчистоне соседские голуби съели горох, который посадил Непер. Несмотря на его жалобы, сосед отказался изловить наглых птиц. Следующим утром можно было видеть слуг Непера, собирающих неподвижные тушки птиц и прятавших их в мешки. Все решили, что тут замешано колдовство, но на самом деле Непер просто «напоил» голубей, пропитав горох вином.

Аттракторы и ураганы

От метеорологии к хаосу



▲ *Синоптики составляют подробнейшие карты перемещений циклонов, фронтов и антициклонов, однако прогнозы погоды по-прежнему не сбываются. И дело не в том, что ученые плохо выполняют свою работу. В начале 1960-х годов было доказано, что будущее, даже описывающееся относительно простыми уравнениями, всегда остается непредсказуемым: оно находится в сфере действия теории хаоса и обладает чувствительностью к первоначальным условиям (т. н. «эффект бабочки»).*

В физико-математических науках для того, чтобы предсказывать состояние системы, необходимо вывести уравнение, отражающее ее изменение во времени, и научиться решать его. Решением является функция времени, а следовательно, однажды вычислив ее значение, мы можем узнать состояние системы в любой момент. Таким образом, исходя из начальных условий мы узнаем, что будет происходить через секунду, через час или через двести миллионов лет. Сегодня в распоряжении науки имеется множество возможностей узнать, например, место и точное время солнечного затмения, которое состоится через 2000 лет, но ученые не способны предсказать, пойдет ли дождь в одном конкретном районе на следующей неделе. Это происходит из-за того, что климатология относится к числу так называемых хаотических систем.

Сложные уравнения

Предсказывать погоду тяжело и сложно. Климатологией занимается специальный раздел физики — гидродинамика, в котором широко используются дифференциальные уравнения в частных производных. Подобные уравнения могут иметь разный уровень сложности, но те, которые применяются для математического моделирования природных явлений, являются подвидом уравнений Навье — Стокса. До сих пор решения этих уравнений найдены лишь для некоторых частных случаев. Как правило, разрабатываются специальные климатические модели, благодаря которым уравнения упрощаются, и их становится возможно решить при помощи современных компьютеров.

Чувствительность к начальным условиям

Предположим, что у нас есть компьютерная программа, способная решать определенные уравнения, в которых вводится значение x и требуется узнать значение данной переменной в конце некоего отрезка времени t (речь может идти о температуре, атмосферном давлении или состоянии воды, зарегистрированном в определенной зоне). Например, если мы начнем со значения 1,236 497, по истечении одной секунды это значение превращается в 80, а через неделю — в 120. Поскольку

▲ *Эдвард Лоренц обладал удивительной способностью делать правильные выводы из случайного эксперимента. Это качество, которое известно как серендипность (инстинктивная, интуитивная прозорливость), позволило ему понять, что незначительное изменение первоначальных условий простой метеорологической модели через некоторое время приведет к радикальному изменению направления развития ситуации.*

► *С момента своего открытия хаос виден повсюду. Например, дым сигареты летит тонкой струйкой, затем начинает беспорядочно подниматься, формируя капризные завитки.*

это арифметическое вычисление, можно решить, что точности до четвертого или пятого знака после запятой нам будет более чем достаточно. Мы можем это проверить: число 1,2365 продолжает давать 80 по истечении секунды и 119,99 — через неделю. До сих пор все кажется нормальным. Неожиданностью для нас бы стало, если бы значение округленного числа через секунду было бы 80, а через неделю — 500.

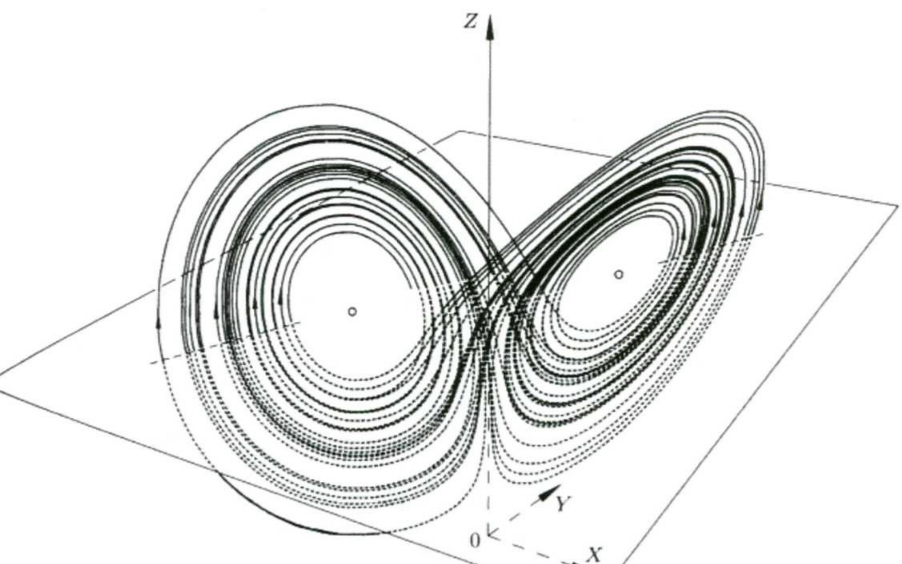
Иначе говоря, такое незначительное изменение во входных данных может вызвать весьма существенные отклонения в относительно отдаленном будущем. Именно это происходит в так называемых хаотических системах, с которыми Эдвард Лоренц — настоящий математик, который по иронии судьбы стал метеорологом — столкнулся в начале 1960-х годов, решая при помощи компьютера простую систему уравнений для моделирования атмосферной конвекции. Важнейшие открытия Лоренца были опубликованы, к несчастью, в малоизвестных метеорологических журналах, и прошли годы, прежде чем научное сообщество узнало об их необыкновенной значимости.

▲ *Эффект бабочки превратился в эмблему хаоса и стал более известен, чем сама теория хаоса. Первооткрыватель явления, Эдвард Лоренц, дал ему образное и запоминающееся название. Обложку одной из самых известных его книг об этом феномене украшает судьбоносное чешуйчатокрылое.*

Эффект бабочки

Лоренц довольно быстро понял, что долгосрочные прогнозы погоды невозможны. Виной тому большое количество переменных, влияющих на начальные условия, но самое главное — даже при достижении высокой точности измерений сколь угодно малые ошибки задания начальных данных для расчета прогноза в долгосрочной перспективе трансформируются в большие. Для описания этого феномена Лоренц использовал метафору. «Может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?», — вопрошал ученый, рассуждая о предсказуемости.

▼ *На данном графике атмосферные процессы представлены в виде «крыльев бабочки», или аттрактора Лоренца. Траектории кривых непредсказуемы, однако все они пересекаются в центре фигуры — точке 0.*



ЭТО ИНТЕРЕСНО

- Ламповый компьютер Royal McBee LGP-300, при помощи которого Лоренц проводил свои исследования, был в 100 раз медленнее любого современного домашнего ПК. Поначалу Лоренц не поверил полученным результатам и решил, что компьютер сломался.
- В настоящее время посредством компьютерного моделирования осуществляются точные прогнозы погоды на 8—10 часов вперед. Хотя в некоторых случаях предсказания могут делаться на срок до 10 дней, часто в силу объективных обстоятельств невозможно определить с достаточной степенью точности, какая будет погода через 60 часов. Однако же сегодня прогноз на три дня обладает той же достоверностью, с какой 20 лет назад синоптики говорили лишь о погоде на ближайшие 24 часа.
- Уравнения Навье — Стокса внесены Математическим институтом Клэя (Кембридж, штат Массачусетс) в число семи «Задач тысячелетия». За их решение назначена премия в один миллион долларов США.

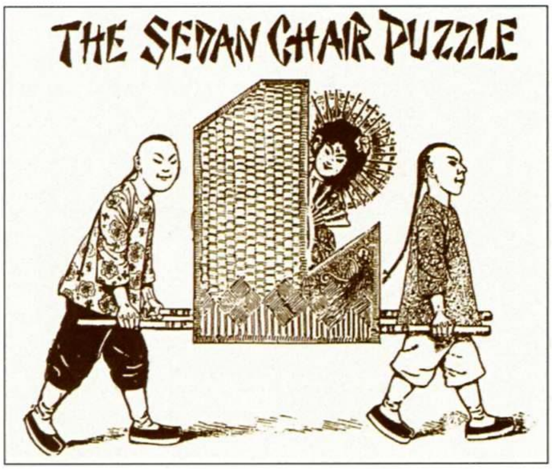
Аттрактор, ловец бабочек

Но Лоренц не удовольствовался открытием хаоса. Ученый продолжил работать над своими уравнениями и один за другим проводил циклы расчетов в поисках стандартных моделей поведения хаотических систем. Наконец он нашел то, что искал. График вращения водного колеса в трехмерном пространстве показал совершенно неожиданный результат: вокруг центральной точки проявился завораживающий рисунок, напоминающий крылья бабочки.

Лоренц открыл то, что в настоящее время называется аттрактором. Траектории движения точек непредсказуемы, однако они не выходят за границы фигуры. Аттрактор Лоренца представляет собой более сложный объект, чем может показаться на первый взгляд. Это фрактал (размером 2,05), сформированный бесконечным числом поверхностей и обладающий бесконечной площадью, но имеющий нулевой объем.

Стоит отметить, что динамические системы могут формировать более одного аттрактора. Небольшие изменения вроде раздвоения крыла бабочки еще не говорят о смене всего аттрактора. Однако возможны изменения начальных условий, следствием которых становится переход системы от одного аттрактора к другому. Это происходит, например, при смене климата.

Вопрос о пространстве



◀ *Закройте паланкин, разрезав его на минимально возможное количество частей.*

1. Загадка паланкина

«Что касается транспорта в Китае, — вспоминал один писатель, который большую часть жизни провел в Поднебесной, — то там очень скоро привыкаешь передвигаться в паланкине, что гораздо удобнее и быстрее наемного экипажа. Эти паланкины сплетены из ивовых прутьев и напоминают маленькие китайские коробочки из цветной соломки, сделанные так искусно, что невозможно обнаружить места соединения».

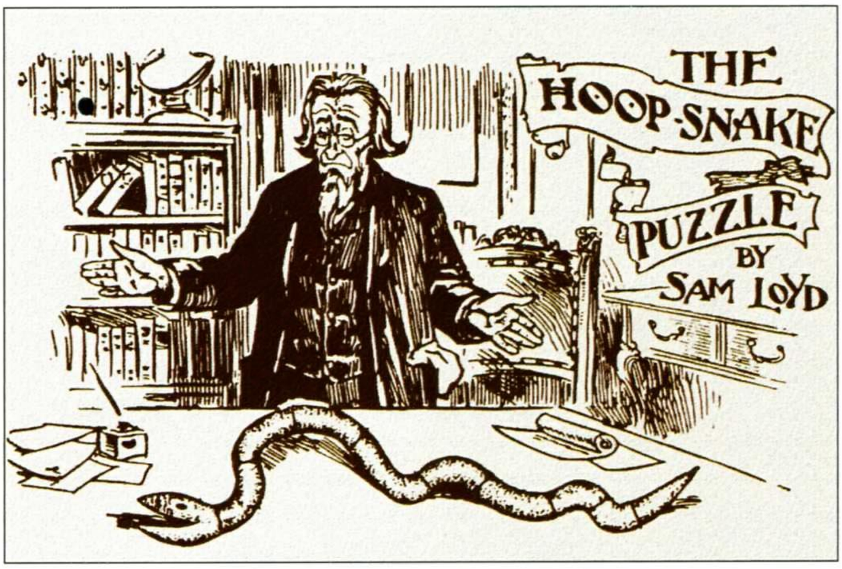
Этот рассказ породил головоломку. Дело в том, что во время дождя паланкины закрываются, причем таким образом, что при самом внимательном изучении не удается найти места соединения отдельных частей. Вам предлагается разрезать изображенный на рисунке паланкин на возможно меньшее количество частей так, чтобы затем, сложив их нужным образом, получить правильный квадрат.

2. Загадка змеи-обруча

Профессор фон Шафскопфен, известный натуралист, был весьма озадачен противоречивыми рассказами о змее-обруче, названной так потому, что она имела обыкновение передвигаться довольно странным образом: взяв в рот конец своего хвоста, она катилась, словно обруч. Эта особенность подотряда Ophidia описана многими натуралистами, а один университетский профессор утверждает, что видел трех змей, образовавших один большой обруч, который пронесся, как молния, и исчез, потому что змеи проглотили друг друга.

Никто не отрицает возможность такого исчезновения, но возникают сомнения относительно самого существования змеи-обруча. Профессор Шафскопфен рыскал по всей стране, пока, наконец, в дебрях Обручевых гор не нашел великолепный экземпляр окаменевшей змеи-обруча с кончиком своего хвоста во рту. Острой пилой профессор распилил змею на 10 частей, бережно переложил их ватой, упаковал и с триумфом привез свою добычу домой. Вот тут-то он и потерпел полный крах в попытках сложить части так, чтобы хвост оказался во рту.

Математики утверждают, что из этих 10 частей можно сложить 362 882 змеи, ни одна из которых не будет представлять собой замкнутый обруч. Это дало повод скептикам поставить 362 882 против одного за то, что такая змея никогда и не существовала!



▲ *Расположите 10 частей так, чтобы змея укусила себя за хвост.*

3. Задача для водопроводчика

Рассмотрим практическую сантехническую задачу, которая может быть любопытна для всех, кто интересуется механикой.

Водопроводчику нужно вычислить минимально возможную стоимость медного чана вместимостью 1 000 кубических дюймов. Медь продается в листах по три квадратных дюйма и стоит один доллар за квадратный дюйм, так что его задача состоит в том, чтобы определить наименьшие размеры прямоугольного чана. Очевидно, что если основание чана равно 10 кв. дюймам, 10 умноженное на 10 равно площади основания 100, и это число, умноженное на глубину, дает нужные нам размеры чана вместимостью 1 000 куб. дюймов.

Куб объемом 10 кв. дюймов вмещает 1 000 куб. дюймов: верно, но потребовалось бы 500 дюймов меди (по 100 на основание и на каждую из сторон). Наша задача — найти наиболее экономичную форму для чана вместимостью 1 000 куб. дюймов, используя наименьшее количество меди.

Это простое вычисление, которое любой механик решает ежедневно, каждый на свой лад, но математики обнаружат здесь явление под названием «удвоение куба».

4. Санитарка Красного Креста

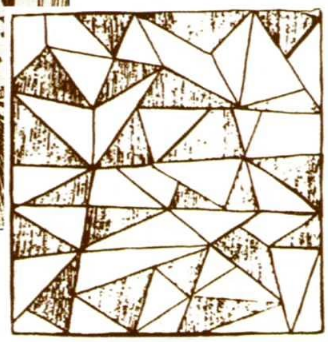
В царстве головоломок нет ничего более занимательного, чем коллекция загадок, связанных с греческим крестом и его соотношением с квадратом, параллелограммом и другими симметричными фигурами. Вместо известной задачки на превращение квадрата в крест с помощью наименьшего числа разрезов мы предлагаем составить два креста из одного.

Рассказывают об одном солдате, который перед тем, как вернуться домой, попросил у сестры милосердия, спасшей ему жизнь, на память крест, который она носила на рукаве. Женщина великодушно извлекла ножницы и разрезала крест на несколько частей, которые можно было соединять, составляя два одинаковых по размеру креста. Эта хитроумная головоломка необычайно проста и привлекательна, и разгадать ее так же приятно, как выиграть приз.

◀ *Разделите греческий крест на наименьшее возможное количество частей, которые можно было бы сложить таким образом, чтобы получить два греческих креста одинакового размера.*

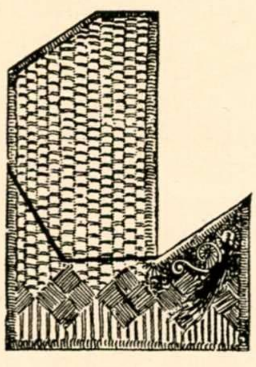
5. Скрытая звезда

Найдите правильную пятиконечную звезду на рисунке справа.



Решения

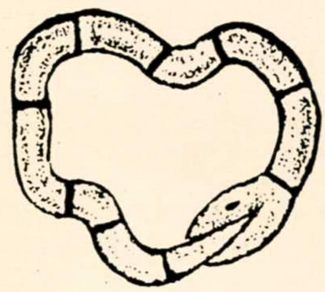
1. Это первая головоломка из коллекции задач на «рассечение». Читателю наверняка будет интересно узнать: немецкий математик Давид Гильберт продемонстрировал, что многоугольник можно разрезать на конечное число частей, из которых повторно можно сложить другой многоугольник равной площади. Однако эти рассечения не очень занимательны, если число частей недостаточно велико для того, чтобы решение было элегантным и неожиданным.



Почти все простые и правильные многоугольники (кроме разве что пентаграммы, то есть пятиконечной звезды, с которой все несколько сложнее) используются в задачах на рассечение, требующих большой изобретательности.

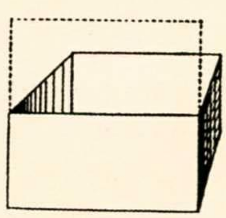
Говоря о «теории рассечений», мы рекомендуем серию статей группы преподавателей математики Университетского колледжа Чикаго, опубликованных в «Мэтимэтикс тичер»: номера за май, октябрь и декабрь 1956 года и за февраль и май 1957 года.

2.



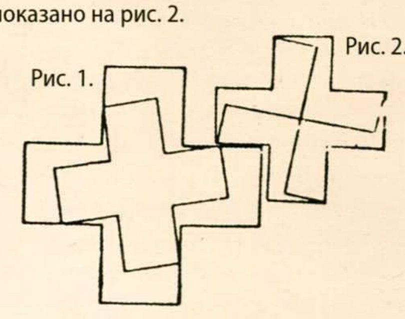
3. В задаче про водопроводчика наиболее экономичным окажется бак с квадратным основанием. Ширина должна быть в два раза больше глубины. Если один куб приблизительно 12,6 кв. дюймов содержит 2000 куб. дюймов, то половина этой глубины даст требуемые 1000 куб. дюймов.

(Точные размеры чана не могут быть рассмотрены в рациональных числах,

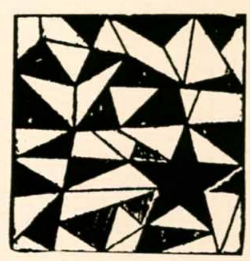


потому что в этом случае мы столкнемся с половиной «удвоенного куба». Выразив их в иррациональных числах, мы можем говорить о том, что у чана были бы длина и ширина, равные кубическому корню из 2000, и глубина, равная половине кубического корня из 2000).

4. Следующая иллюстрация показывает, как можно разрезать греческий крест на пять частей и как эти части могут соединяться, образуя два креста одинакового размера. Разрежьте крест как показано на рис. 1, а затем сложите части так, как показано на рис. 2.



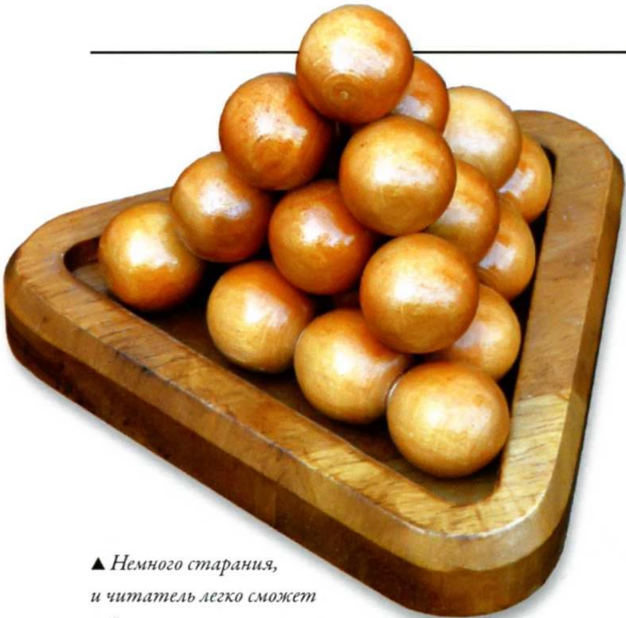
5.



Когда мы говорим о пирамидах, нам сразу вспоминаются величественные громады с четырехугольным основанием — усыпальницы Хеопса, Хефрена и Микерина. Цель этой головоломки — построить четырехугольник, погрузившись в геометрию чисел и мистику правильных многоугольников.

Трехмерная головоломка

Пирамида из шаров



▲ *Немного старания, и читатель легко сможет собрать вместе шесть частей головоломки и возвести эту пирамиду из шаров.*

▲ *Пирамида Хеопса может считаться великолепной головоломкой, состоящей из сотен тысяч каменных блоков, которые формируют гигантскую пирамиду с четырехугольным основанием, пронизанную запутанными переходами.*

В отличие от египетских пирамид, в основании которых — квадрат, пирамида из шаров в нашей головоломке — геометрический объект, который называется четырехгранником и образован четырьмя треугольными гранями. Можно ли вычислить в уме, из скольких шаров состоит эта пирамида? Ответ находится на следующих страницах. Если мы посмотрим на одну из сторон пирамиды, то увидим, что она является треугольником, составленным из одного шара в верхнем ряду, двух — в ряду ниже, трех — в предпоследнем и четырех — в самом нижнем.

Всего 10 шаров, сложенных определенным образом — настолько определенным, что он даже приобрел собственное название — тетрактис — и дал начало целой метафизической теории со значительным содержанием математики.

Мистика чисел

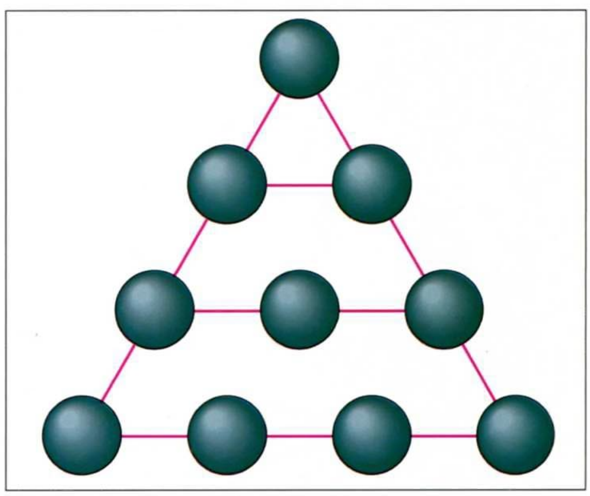
«Клянусь тем, кто дал нашим душам тетрактис, кто имеет истоки и корни в вечно живой природе!»
Пифагор (Золотые стихи, 47)

Это были слова, произносимые в начале торжественной церемонии посвящения человеком, который хотел быть принятым в секретное братство пифагорейцев. И чем был этот тетрактис, приобретший божественную природу в пифагоровой клятве? Геометрическое представление числа 10 выражено в форме равностороннего треугольника.

Шары, камни или любые объекты, размещенные в треугольной форме: один в первой линии, два во второй, три в третьей и четыре в четвертой; совершенный треугольник, в котором сумма всех элементов, составляющих каждую линию, это:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Число 10 превратилось в объект почитания не потому, что столько же пальцев на руках человека, а из-за его уникальной геометрической природы.



► *Тетрактис считался квинтэссенцией пифагоровой мистики.*

Тетрактис — треугольное число на плоскости. Если бы его компоненты были трехмерны, то тетрактис оказался бы нашей пирамидой из шаров. Но займемся сначала «плоскими» числами. Они бывают треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д. и называются фигурными.

Многоугольные числа зародились на заре пифагорейства и стали важной вехой в истории развития понятия числа, так как имели геометрический характер. Их свойства и связи между ними никак не зависели от знаков, с помощью которых их представляли. Фигурные числа имели ряд характерных особенностей и вместе с тем обладали универсальной природой. Это побудило ученых людей искать в цифрах некие мистические свойства, даже было создано целое направление метафизики, имеющее дело с числами (нумерологические науки, Каббала и т. д.).

Однако математические свойства многоугольных чисел также не были забыты. Их изучением занимались такие ученые, как Никомах, Диофант, Гаусс, Лежандр и Коши, получившие важные результаты относительно связей между этими числами.

Понятие многоугольного числа относится к плоским двумерным фигурам. Но сходные числа существуют и в трехмерном пространстве. Они называются тетраэдральными, о них мы поговорим ниже. Когда число представлено точками, которые расположены на одинаковой дистанции друг от друга, о нем говорят как о фигурном. Если фигура, которую формируют эти точки, — правильный многоугольник, то перед нами многоугольное число.

Число 1 всегда представлено единственной точкой, и начиная от него они последовательно группируются следующим образом.

Треугольные числа, из ряда натуральных чисел:

$$1,\ \underbrace{1+2}_{3},\ \underbrace{1+2+3}_{6},\ \underbrace{1+2+3+4}_{10},\ \underbrace{1+2+3+4+5}_{15},\dots$$

Квадратные числа, начиная с серии нечетных:

$$1,\ \underbrace{1+3}_{4},\ \underbrace{1+3+5}_{9},\ \underbrace{1+3+5+7}_{16},\ \underbrace{1+3+5+7+9}_{25},\dots$$

Пятиугольные, начиная с серии:

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

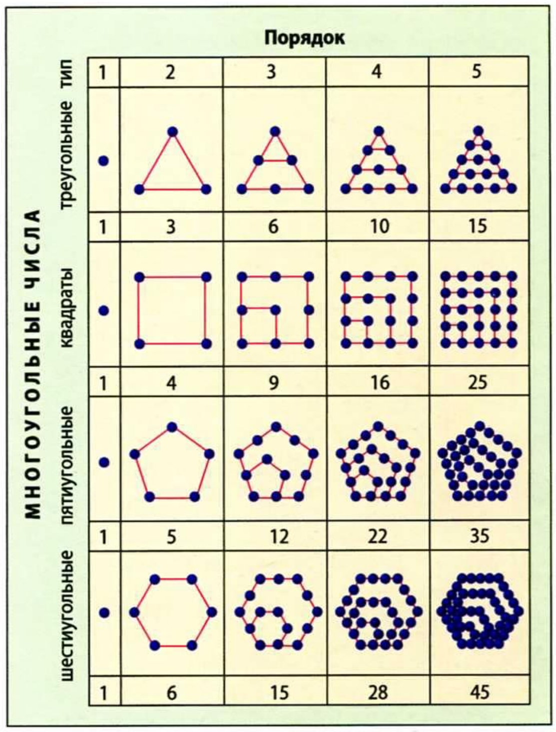
$$1,\ \underbrace{1+4}_{5},\ \underbrace{1+4+7}_{12},\ \underbrace{1+4+7+10}_{22},\ \underbrace{1+4+7+10+13}_{35},\dots$$

Шестиугольные, начиная с серии:

$$1, 5, 9, 13, 17, \dots$$

$$1,\ \underbrace{1+5}_{6},+\underbrace{1+5+9}_{15},\ \underbrace{1+5+9+13}_{28},\ \underbrace{1+5+9+13+17}_{45},\dots$$

▶ *Представление первых четырех треугольных, квадратных, пятиугольных и шестиугольных чисел.*



Примеры фигурных и многоугольных чисел

3 может изображаться как нефигурное число:

Или представлять фигурное число:

Или многоугольное число (которое, безусловно, тоже фигурное):

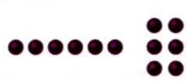
4 может быть представлено как нефигурное число:

Или как фигурное:

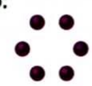
Или многоугольное число:

6 может представляться как нефигурное число:

Или представлять фигурное число:



Или многоугольное число:



Законы образования

Формула образования многоугольных чисел известна с древности. Речь идет о рекуррентной формуле, а это значит, что каждое число может быть получено из предыдущего:

$$P_r(n) = P_r(n-1) + (r-2)(n-1) + 1,$$

где r представляет тип числа: если оно треугольное, надо написать $r = 3$; если речь идет о пятиугольном числе, то $r = 5$ и т. д.; n — натуральное число, чье значение мы хотим узнать. Таким образом, можно находить, например, значение треугольных чисел:

$$P_3(1) = 1$$
$$P_3(2) = P_3(2-1) + (3-2)(2-1) + 1 =$$
$$= P_3(1) + 1 \cdot 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$P_3(3) = P_3(3-1) + (3-2)(3-1) + 1 =$$
$$= 3 + 1 \cdot 2 + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$$

Эта формула легко просчитывается на компьютере.

В таблице на следующей странице присутствуют 10 первых значений первых 10 многоугольных чисел.

В первой линии представлены натуральные числа, расположенные в порядке от меньшего к большему, а в первом столбце — тип многоугольного числа. Итак, чтобы узнать, какое число является пятиугольным и соответствует 9, обозначим его как $P_5(9)$, ищем в первом столбце номер 5, который является порядком, и находим столбец номера 9, где видно, что число, которое нам нужно, это 117, символически выраженное таким образом:

$$P_5(9) = 117$$

Таблица значений $P_r(n)$

10 первых значений
10 первых многоугольных чисел

Тип	Порядок									
r \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
4	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
5	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
6	1	6	13	28	45	66	91	120	153	190
7	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
8	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
9	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
10	1	10	27	52	85	136	175	232	297	370

Зверь Апокалипсиса

На таблице многоугольных чисел мы видим, что где-то числа повторяются, например: $P_5(4) = 22$; $P_{12}(3) = 33$; $P_3(10) = 55$.

Среди них есть одно, которому удалось приобрести исключительное мистическое значение: это треугольное число 36,

$$P_3(36) = 666$$

Данное число получается при постройке треугольника, образованного одной точкой в первой линии, двумя во второй, тремя в третьей и т. д.

В Апокалипсисе упоминается Зверь, который поднимется из земли, с рогами агнца и голосом дракона, и все живущие должны будут поклониться ему. Никто — ни богатые, ни бедные, ни свободные, ни рабы — не сможет ни покупать, ни продавать, если на руке или на лбу у него не будет метки Зверя. Эта метка — имя чудовища, или, если более точно, число его имени: «Кто имеет ум, тот сочти число зверя, ибо это число человеческое; число это шестьсот шестьдесят шесть» (Откр. 13:18).

Если считать буквы числовыми фигурами, то выдвинутая проблема состоит в нахождении имени, числа которого составляют 666. Первым вариантом стало имя «Цезарь Нерон». Однако преступления этого императора хотя и вызывали огромный резонанс, все же и близко не доходили до масштабов Апокалипсиса. Любопытная информация: греческие буквы имени Иисуса складываются в 888, число, которое среди каббалистов означает «абсолютное преодоление».

Альфа	1
Бета	2
Гамма	3
Дельта	4
Эпсилон	5
Дзета	7
Эта	8
Тета	9
Йота	10
Каппа	20
Лямбда	30
Мю	40
Ню	50
Кси	60
Омикрон	70
Пи	80
Ро	100
Сигма	200
Тау	300
Ипсилон	400
Фи	500
Хи	600
Пси	700
Омега	800

Гематрия

Гематрия, которая была очень популярна с I века н. э. и на протяжении всех средних веков, основывается на назначении чисел буквам алфавита.

Например, буквам греческого алфавита были приписаны числа из таблицы слева. Слово «Аминь» (Альфа, Мю, Йота, Ню) — это сумма $1 + 40 + 8 + 50 = 99$. Именно по этой причине данное восклицание часто встречается в конце религиозных текстов.

В трех измерениях

Кроме многоугольных чисел мы могли бы говорить о числах многоугольных звездчатых, многогранных или многогранных отсеченных, звездчатых и т. д. В самом деле, получаются интересные математические результаты при сложении сфер (или двенадцатигранников, что удобнее, потому что они не скользят), если поставить себе целью собрать правильный многогранник.

Например, последовательность тетраэдральных чисел сформирована следующим сложением:

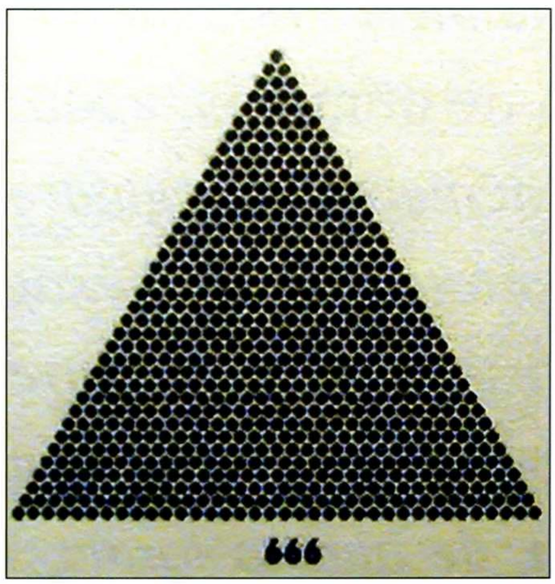
$$1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 6 = 10$$
$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

Чтобы узнать тетраэдральное число от натурального числа n, можно применить формулу:

$$\mathrm{Tet}_n = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{6}$$

Например, тетраэдральное число соответствует 4, а именно, пирамиде из шаров, по основанию которой идут четыре шара с любого края, то:

$$\mathrm{Tet}_4 = \frac{4(4+1)(4+2)}{6} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$$



▶ *Треугольное число 666 знаменито тем, что в книге «Откровение Иоанна Богослова» оно было названо символом Сатаны.*

Таким образом был найден ответ на вопрос о количестве шаров, которое должна иметь наша пирамида. Обратимся к общей формуле — в лучших математических традициях, мы можем применять ее к любому случаю. Если вы хорошо считаете, то имеет смысл предположить, что у вас есть необычное пространственное видение и вам удастся угадать число шаров, необходимых, чтобы построить любую тетраэдрическую пирамиду. Для этого нам достаточно сосчитать число шаров, которые есть в ости пирамиды, и применить формулу.

Например, давайте возьмем пирамиду из шаров, у которой в ости их пять. Здесь мы берем за основание цифру 5 и стараемся всегда иметь сумму трех последовательных чисел, делящихся на шесть. Итак, мы умножаем 5 на 6 и на 7, что дает 210, и делим этот результат на 6. Получаем 35, что и является количеством шаров в пирамиде. Так, у простой пирамиды из трех шаров в ости были бы $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, что после деления на 6 будет равно 10 шарам.

Теперь вопрос заключается в следующем: можно ли строить пирамиду из шаров при любом количестве шаров в ости? Если бы кто-то спросил нас, сколько шаров требуется, чтобы построить определенную пирамиду, и у нас получилось бы, например, 34,5, было бы абсурдным строить пирамиду с половиной шара. Или все-таки возможно, что в каком-то случае у нас выходит дробное число?

Можно посмотреть с другой стороны: сумма трех последовательных чисел — всегда ли она делится на 6? Ответ — да! Если даны три последовательных числа a, b и c, то как минимум одно кратно 2; а если мы напишем полную числовую серию:

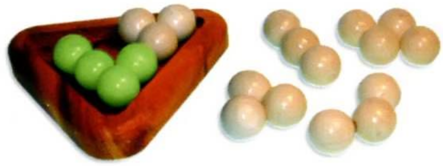
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 и т. д.,

то легко увидеть, что одно из трех последовательных чисел кратно 3. Следовательно, результат a, b и c содержит, по крайней мере, одно число, кратное 2, одно — кратное 3, и, следовательно, кратность $2 \cdot 3 = 6$.

Решение

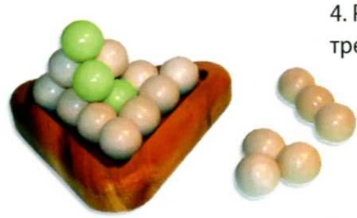
Пирамида из шаров состоит из шести частей: двух, собранных из четырех шаров, и четырех из трех. Таким образом, она сложена из 20 шаров. Требуется составить четырехгранник. Чтобы решить эту задачу, достаточно складывать детали головоломки в порядке, показанном на следующих рисунках:

1. Сложите первую треугольную группу.

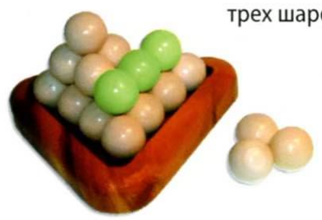


2. Сложите группу в форме L.

3. Разместите группу из четырех шаров следующим образом, оставляя свободным центр.

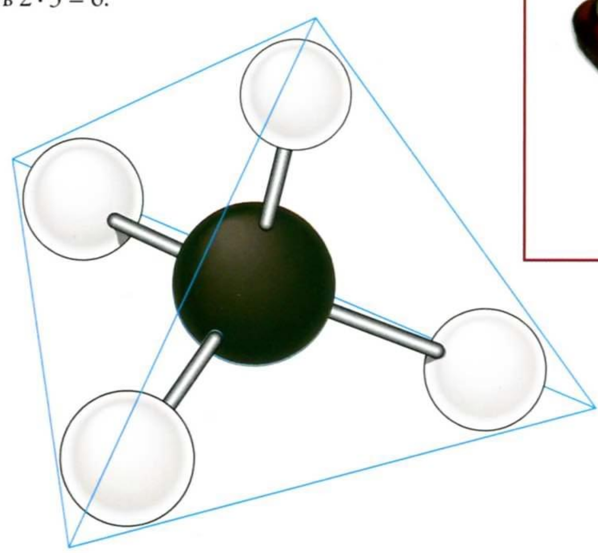


4. Разместите вертикально в центре «изогнутую» группу.



5. Добавьте ленту из трех шаров.

6. Завершите головоломку оставшейся треугольной группой.



◀ *Существуют несколько молекулярных моделей, которые представляются посредством структур шаров. В этом случае белые шары символизируют ядра водорода, черный шар — ядро углерода. Также изображаются сегменты, которые связывают соединение. Это хорошо видно на примере молекулы метана.*

В следующем выпуске через 2 недели

Крестовая головоломка

Комбинаторика

Техники счета

Отец неполноты

Курт Гёдель

Тригонометрия

Сила триангуляции

Лучшее от Генри Э. Дьюдени

Арифметические и алгебраические задачи

Спрашивайте в киосках!